

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1956-019

Voordracht in de serie
"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

Over een stelling van Segre in de eindige meetkunde

Dr. J.J. Seidel



Voordracht in de serie

"Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht"

door

Dr J.J. Seidel

14 november 1956

Over een stelling van Segre in de eindige meetkunde.1. Eindige lichamen.

Een lichaam F , dat een eindig aantal elementen bevat, is noodzakelijk commutatief, [1] p.33. Noem het eenheidselement 1 en zij p het kleinste natuurlijke getal zodat $p \cdot 1 = 0$. Dan is p priem (p -karakteristiek van F). Het aantal elementen van F is

$$q = p^k$$

Het product van de elementen $\neq 0$ van F is -1 .

De vergelijking

$$ax^2 + b = y^2, \quad a \neq 0$$

is oplosbaar in F , omdat beide leden $\frac{1}{2}(q+1)$ waarden van F doorlopen, als x resp. y alle waarden van F doorlopen.

2. Het projectieve vlak over F , notatie $PG(2, q)$

Punten zijn klassen van grepen

$$\{x_1, x_2, x_3\} \sim \{\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3\}$$

waarin $\lambda, x_i \in F$, $\lambda \neq 0$. Er zijn $q^2 + q + 1$ punten. Elke rechte bevat $q+1$ punten, door elk punt gaan $q+1$ rechten.

3. Kegelsneden in $PG(2, q)$.

Neem $p=2$. De vergelijking

$$\sum a_{ij} x_i x_j = 0, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

is te herleiden tot

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0, \text{ of } a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 = 0, \text{ of } x_1^2 = 0.$$

Aan het derde type voldoen $q+1$ punten, aan het tweede type één punt of $2q+1$ punten. De verzameling der punten die aan het eerste type voldoen heet een kegelsnede. Elke kegelsnede bevat precies $q+1$ punten, immers wegens 1. bevat hij tenminste één punt P , en alle rechten (op één na) door P snijden de kegelsnede nog in een ander punt.

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

4. Ovalen.

Een ovaal K is een verzameling van $q+1$ punten, zodat geen drietal collineair is.

Neem een rechte die 2, resp. 1, resp. 0 snijpunten met een ovaal K heeft, een secant, resp. tangent, resp. nonsecant van K. Door een punt op K gaat één tangent. Door een punt Q niet op K gaan of twee tangenten (zeg: Q ligt buiten K), of nul tangenten (zeg: Q ligt binnen K). Er zijn $\frac{1}{2}q(q+1)$ buitenpunten en evenveel secanten. Op een nonsecant liggen $\frac{1}{2}(q+1)$ buiten- en evenveel binnenpunten. Op een secant liggen $\frac{1}{2}(q-1)$ buiten- en evenveel binnenpunten. Door een binnenpunt gaan $\frac{1}{2}(q+1)$ secanten en evenveel nonsecanten. Door een buitenpunt gaan $\frac{1}{2}(q-1)$ secanten en evenveel nonsecanten.

Hoofdstelling. Elke ovaal is een kegelsnede.

Vermoeden van Kustaanheimo [4], bewijs van B. Segre [2].

5. Hulpstelling. De driehoek gevormd door 3 punten van een ovaal en de driehoek gevormd door de tangenten in deze punten liggen perspectivisch.

Bewijs: Neem O_1, O_2, O_3, P op een ovaal K. Laat de rechten $O_i P$, $i=1,2,3$, tot vergelijking resp.

$$x_2 = \lambda_1 x_3 \quad ; \quad x_3 = \lambda_2 x_1 \quad ; \quad x_1 = \lambda_3 x_2$$

hebben, waarin $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$. Laat de tangenten in O_1, O_2, O_3 tot vergelijking resp.

$$r_1 \equiv x_2 = a_1 x_3 \quad ; \quad r_2 \equiv x_3 = a_2 x_1 \quad ; \quad r_3 \equiv x_1 = a_3 x_2$$

hebben, dan geldt, als P alle punten $\neq O_i$ van K doorloopt, dus als λ_i alle waarden van F behalve 0 en a_i doorloopt, dat

$$a_1 \prod \lambda_i = -1, \quad \text{waaruit} \quad a_1 a_2 a_3 = -1.$$

Dit betekent, dat de verbindingsrechten van O_i en $r_j \cap r_k$ door één punt U gaan. Wanneer U eenheidspunt is, dat is $a_1 = a_2 = a_3 = -1$.

6. Bewijs der hoofdstelling.

Neem de coördinatendriehoek en het eenheidspunt als in 5. Dan heeft niet alleen de ovaal K, maar ook de kegelsnede

$$C \equiv x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 0$$

in zijn punten O_i de tangent r_i . Wij bewijzen dat P op K impliceert P op C. Laat $P(c_1, c_2, c_3)$ de rechte

$$r \equiv b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

als tangent aan K hebben. Toepassing van de hulpstelling op driehoek $O_i O_j P$ levert

$$b_i = \frac{c_i}{c_j} \quad \text{voor } i, j = 1, 2, 3$$

$$b_2(c_1+c_2) = b_3(c_1+c_3) \text{ en cyclisch.}$$

De eis, dat P op r ligt, voert tot het gestelde.

7. Uitbreiding A. Noem een verzameling van k punten in $PG(2,q)$, zodat geen drietal punten collineair is, een k-boog. Probleem: kan een k-boog aangevuld worden met $q+1-k$ punten zodat een kegelsnede ontstaat? Voor $k=q+1$ is het antwoord bevestigend (hoofdstelling). Voor $k=q$ geldt (Segre [3]): elke q-boog, $q > 3$, behoort tot precies een kegelsnede.
Voor $k < q$ is het probleem i.h.a. niet opgelost.
8. Uitbreiding B. Voor $PG(3,q)$, $p \neq 2$, bewees Barlotti [6] o.a.: Een verzameling van q^2+1 punten, waarvan geen drietal collineair is, is een kwadriek zonder rechten.
9. Uitbreiding C. Voor $PG(3,q)$, $p \neq 2$, bewees Segre [3]: Een verzameling van $q+1$ punten, waarvan geen viertal coplanair is, is een kubische ruimtekromme.
10. Congruentie.

Aanleiding tot de hoofdstelling was de invoering van een congruentiebegrip in de eindige meetkunde door Kustaanheimo [4].

Wanneer in het eindige affine vlak der punten $(x,y,1)$ de verzameling der $2(q+1)$ punten, die verkregen wordt door op de $q+1$ rechten door een vast punt telkens een punt en zijn tegenpunt te nemen, bestaat uit twee $(q+1)$ -bogen, dus uit twee kegelsneden, dan kan men met deze kegelsneden als ijk-krommen een congruentiebegrip voor segmenten definiëren. De vergelijkingen der ijk-krommen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = g \quad \text{en} \quad dx^2 + 2exy + fy^2 = h$$

zijn door coördinatentransformatie te herleiden tot

$$x^2 - ky^2 = g \quad \text{en} \quad x^2 - ly^2 = h$$

waarin k en l niet-kwadraten zijn. Daar deze krommen geen snijpunt hebben, moet $k=1$, terwijl van de elementen g en h er één kwadraat en één niet-kwadraat is. In het geval dat -1 niet-kwadraat is, dus als $q=4v-1$, kunnen als ijk-krommen genomen worden

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{en} \quad x^2 + y^2 = -1.$$

Twee segmenten (x_1, y_1) , (x_2, y_2) en (x_3, y_3) , (x_4, y_4) zijn dan congruent te noemen, indien

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = (x_3-x_4)^2 + (y_3-y_4)^2$$

Literatuur

- [1] F.W. Levi, Finite geometrical systems, Calcutta 1942.
- [2] B. Segre, Ovals in a finite projective plane, Canad.Journ. Math.7 (1955) 414-416.
- [3] B. Segre, Curve razionali normali e k-archi negli spazi finiti, Annali di Mat.(4) 39 (1955) 357-379.
- [4] G. Järnefelt-P.Kustaanheimo, An observation on finite geometries, 11te Skand.Mat.Kongr.Trondheim (1949) 166-182.
- [5] G. Järnefelt, Reflections on a finite approximation to Euclidean Geometry, Ann.Acad.Sci.Fenn.96 (1951).
- [6] A. Barlotti, Un estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo, Boll.Un.Mat.Ital.(3), 10, (1955) 498-506.